Время выполнения заданий — 240 минут.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.

Максимальное количество баллов — 100.

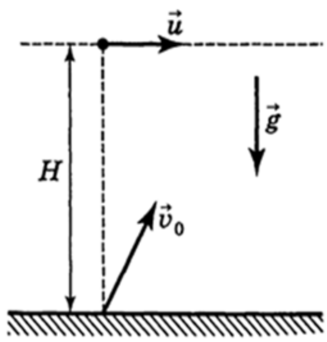
Задача 1 (20 баллов). В горизонтальном дне сосуда имеется прямоугольное отверстие с размерами $a \times b$. Его закрыли прямоугольным параллелепипедом со сторонами $b \times c \times c$ так, что одна из диагоналей грани $c \times c$ вертикальна (вид сбоку показан на рисунке). В сосуд медленно наливают жидкость плотностью ρ. Какова должна быть масса параллелепипеда M чтобы он не выплывал при любом уровне жидкости? Силами трения и поверхностного натяжения пренебречь.

Ответ: $M > \rho b \left(c - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2.$

Задача 2 (20 баллов). В прямоугольный цилиндрический сосуд, площадь основания которого $S = 100\ \text{см}^2$, наливают 1 л соленой воды плотности $\rho_1 = 1{,}15\ \text{г/см}^3$, и опускают льдинку из пресной воды. Масса льдинки $m = 1\ \text{кг}$. Определите, как изменится уровень воды в сосуде, если половина льдинки растает. Считайте, что при растворении соли в воде объем жидкости не изменяется.

Ответ: $\Delta h \approx 0{,}85$ см

Задача 3 (20 баллов). Птица летит горизонтально на высоте H с постоянной скоростью u (рис. 2). Плохой мальчик из 9 класса замечает птицу в момент, когда она находится в точности над его головой и сразу же стреляет из рогатки. Какой должна быть скорость u птицы, чтобы мальчик никак не смог попасть в нее? Максимальная скорость вылета камня равна v_0. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Ответ: $u > \sqrt{v_0^2 - 2gH}$

Задача 4 (20 баллов). В тонкостенной пластиковой бутылке находится $m_0 = 1$ кг переохлажденной жидкой воды. В бутылку бросили сосульку массой $m_1 = 100$ г, имеющую ту же температуру, что и вода в бутылке. После установления теплового равновесия в бутылке осталось $m_2 = 900$ г жидкости. Какую температуру имела переохлажденная вода? Удельные теплоемкости воды и льда равны $C_1 = 4200$ Дж/(кг С) и $C_2 = 2100$ Дж/(кг С) соответственно, удельная теплота плавления льда λ = 3,4 10^5 Дж/кг. Теплоемкостью бутылки и потерями тепла пренебречь.

Ответ: $$T = 0 + \frac{\lambda(m_2 - m_0)}{C_1 m_0 + C_2 m_1} \approx -7{,}7^0 C$$

Задача 5 (20 баллов). Пятью ударами молотка гвоздь забили в деревянную стену. Какую силу нужно приложить к шляпке гвоздя, чтобы выдернуть его?

Ответ: Сила $\mathrm{F} \sim 200$ Н.

9 класс. Решения.

Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Гидростатика.

Условие. В горизонтальном дне сосуда имеется прямоугольное отверстие с размерами $a \times b$. Его закрыли прямоугольным параллелепипедом со сторонами $b \times c \times c$ так, что одна из диагоналей грани $c \times c$ вертикальна (вид сбоку показан на рисунке). В сосуд медленно наливают жидкость плотностью ρ. Какова должна быть масса параллелепипеда M чтобы он не выплывал при любом уровне жидкости? Силами трения и поверхностного натяжения пренебречь.

Источник: Задача предлагалась на Московской олимпиаде (Варламов et al., 2007, Задача 1.241)

Решение. Разобъём параллелепипед вертикальными плоскостями на много маленьких элементов. Рассмотрим силы давления, действующие на каждый из элементов в следующих случаях.

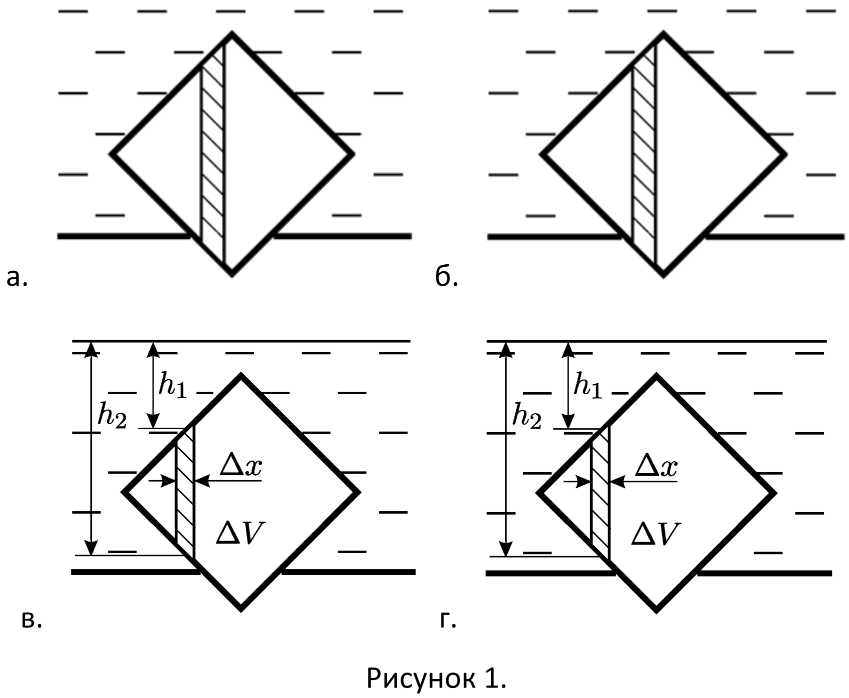


Рисунок 1.

1. Жидкость и сверху и снизу отсутствует. В этом случае, очевидно, сила давления равна нулю.
2. Жидкость есть над элементом, но ее нет под элементом (см. рис.1 а). В этом случае проекция силы давления а вертикальную ось отрицательна, то есть жидкость стремится прижать куб ко дну.
3. Жидкость есть под элементом, но ее нет над элементом (см рис.1. б) В этом случае проекция силы давления на вертикальную ось положительна и равна $f = \rho g b \Delta x h = \rho g \Delta V$, где h и ΔV – высота и объем заштрихованной части элемента.
4. Жидкость есть и под элементом и над ним. В этом случае проекция силы на вертикаль равна $f = \rho g b \Delta x (h_2 - h_1) = \rho g \Delta V$, где h_1 и h_2 – расстояния от поверхности жидкости до верхней и нижней граней рассматриваемого элемента соответственно.

Таким образом, из рассмотрения следует, что если под некоторым элементом пробки нет жидкости, то жидкость может только прижимать пробку к дну сосуда, и минимально значение вертикальной проекции этой прижимающей силы давления, равное нулю, достигается тогда, когда жидкости нет и над этим элементом. Если же под некоторым элементом пробки жидкость есть (случаи 3 и 4), то максимальное значение проекции силы на вертикальную ось положительно и равно $\rho g \Delta V$, где ΔV – объем рассматриваемого элемента (случай 4). Значит, сила давления будет иметь максимально возможное положительное значение тогда, когда жидкость налита в сосуд до уровня, показанного на рис. 1 д. При этом интересующий нас объем ΔV (заштрихован на рисунке) равен

$$\Delta V = \left(c - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 b,$$

а максимальная величина выталкивающей силы равна

$$F = \rho g \Delta V = \rho g b \left(c - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2.$$

Если пробка не будет всплывать при уровне воды, показанном на рис. 1д, то она не будет всплывать и при любом другом уровне. Следовательно, массу пробки можно найти из условия $Mg > F$, откуда

$$M > \rho b \left(c - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2.$$

Задача 2. Термодинамика.

Условие. В прямоугольный цилиндрический сосуд, площадь основания которого $S = 100$ см^2, наливают 1 л соленой воды плотности $\rho_1 = 1{,}15$ г/см^3, и опускают льдинку из пресной воды. Масса льдинки $m = 1$ кг. Определите, как изменится уровень воды в сосуде, если половина льдинки растает. Считайте, что при растворении соли в воде объем жидкости не изменяется.

Источник: задача предлагалась на Всероссийской олимпиаде школьников (*Всероссийские олимпиады по физике 1992-2001*, 2002, Задача 9.23)

Решение: Вначале лед, масса которого m вытесняет объем воды $V_1 = m/\rho_1$, где ρ_1 – начальная плотность воды. После того, как лед массы $m/2$ растаял, вытесняется объем воды $V_2 = m/(2\rho_2)$, где ρ_2 – конечная плотность воды. Объем добавившейся воды $V' = m/(2\rho)$, ρ - плотность пресной воды. Изменение уровня воды в сосуде равно:

$$\Delta h = \frac{V_2 + V' - V_1}{S} = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{2\rho_2} + \frac{1}{2\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right).$$

Конечная плотность воды ρ_2 равна отношению полной массы воды $\rho_1 M + m/2$ к полному объему $V + m/(2\rho)$, т.е.

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V + \dfrac{m}{2\rho_1}}{V + \dfrac{m}{2\rho}},$$

где $V = 1$ л – начальный объем воды. Подставляя числовые значения, получим

ρ_2 =1,1 г/см2 и $\Delta h \approx$ 0,85 см.

Задача 3. Кинематика.

Условие. Птица летит горизонтально на высоте H с постоянной скоростью u (рис. 2). Плохой мальчик из 9 класса замечает птицу в момент, когда она находится в точности над его головой и сразу же стреляет из рогатки. Какой должна быть скорость u птицы, чтобы мальчик никак не смог попасть в нее? Максимальная скорость вылета камня равна v0. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Источник: задача предлагалась на Всероссийской олимпиаде школьников (*Всероссийские олимпиады по физике 1992-2001*, 2002, Задача 9.45)

Решение: Рассмотрим два случая:

1. Если $v_0 \le \sqrt{2gH}$, то скорость u любая.
2. Если $v_0 > \sqrt{2gH}$. Рассмотрим ситуацию, когда траектория камня касается прямой, вдоль которой летит птица. Горизонтальная проекция $v_г$ (см. рис.) скорости камня в течение всего его полета сохраняется. Ясно, при $v_г \ge u$ мальчик может попасть в птицу, а при $v_г < u$ - нет. Из закона сохранения энергии следует, что $v_г = \sqrt{v_0^2 - 2gH}$. Таким образом, мальчик не может попасть в птицу, если $u > \sqrt{v_0^2 - 2gH}$.

Задача 4. Термодинамика.

Условие. В тонкостенной пластиковой бутылке находится $m_0 = 1\,\text{кг}$ переохлажденной жидкой воды. В бутылку бросили сосульку массой $m_1 = 100\,\text{г}$, имеющую ту же температуру, что и вода в бутылке. После установления теплового равновесия в бутылке осталось $m_2 = 900\,\text{г}$ жидкости. Какую температуру имела переохлажденная вода? Удельные теплоемкости воды и льда равны $C_1 = 4200\,\text{Дж/(кг С)}$ и $C_2 = 2100\,\text{Дж/(кг С)}$ соответственно, удельная теплота плавления льда λ = 3,4 105 Дж/кг. Теплоемкостью бутылки и потерями тепла пренебречь.

Источник: задача предлагалась на Московских олимпиадах (Варламов et al., 2007, Задача 2.13)

Решение. После того, как в переохлажденную воду бросили сосульку, в воде начался процесс кристаллизации. Так как после его окончания в бутылке осталась вода, то конечная температура системы равна 0^0 С. Из условия задачи следует, что в лед превратилась часть воды, равная $m_0 - m_2$. При этом выделилось количество теплоты $\lambda(m_0 - m_2)$. Эта теплота пошла на нагрев сосульки и имевшейся вначале воды от температуры T до 0°С, то есть на величину $\Delta T = 0^0 C - T$ 0°. Запишем уравнение теплового баланса:

$$\lambda(m_0 - m_2) = C_1 m_0 \Delta T + C_2 m_1 \Delta T = (C_1 m_0 + C_2 m_1)\Delta T =$$
$$-(C_1 m_0 + C_2 m_1)(T - 0^0 C).$$

Отсюда получаем температуру $T \approx -7{,}7^0 C$.

Задача 5. Задача-оценка.

Условие. Пятью ударами молотка гвоздь забили в деревянную стену. Какую силу нужно приложить к шляпке гвоздя, чтобы выдернуть его?

Источник: Задача предлагалась на вступительных экзаменах в НГУ (*Физика в НГУ. Школьная физика в задачах с решениями. Часть I.*, 2007 Задача 5.31)

Решение. Средняя сила, необходимая для того чтобы выдернуть гвоздь, приблизительно равна силе F, необходимой для того, чтобы его забить. Примем, что гвоздь имеет длину 10 см, масса молотка равна $m = 5$ кг, скорость молотка в момент удара о шляпку сравнима со скоростью брошенного человеком камня: это есть, скажем, $v = 4$ м/с. Работа силы F уходит на погашение кинетической энергии молотка, таким образом получаем соотношение

$$F\,l \sim 5\frac{\mathrm{mv}^2}{2}$$

Таким образом, сила $\mathrm{F} \sim 200$ Н.

Литература

Варламов, С. Д., Зиньковский, В. И., Семёнов, М. В., Старокуров, Ю. В., Шведов, О. Ю., & Якута, А. А. (2007). *Задачи Московских физических олимпиад по физике. 1986-2005. Приложение: олимпиады 2007 и 2007.* (2-е издание, исправленное и дополненное. ed.). Москва: МЦНМО.

Всероссийские олимпиады по физике 1992-2001. (2002). (С. М. С. Козел, В.П. Ed.). Москва: Вербум-М.

Физика в НГУ. Школьная физика в задачах с решениями. Часть I. Вступительные задачи по физике в НГУ 1966-1985 гг. (2007). (В. Г. Меледин, Черкасский, В.С. Ed.). Новосибирск: Новосибирский государственный университет.